2.2.44 α) $\left.\begin{array}{l} E_{ολ}=\frac{1}{2}DA^2 \\ F_{max}=DA \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E_{ολ}}{F_{max}}=\frac{A}{2}$ από όπου $A=0,8m$

$F_{max}=DA$ ή $D=10N/m$, $D=m\omega^2$ ή $\omega=10 rad/s$

$x=A ημ(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow{t=0} \frac{A\sqrt{3}}{2}=A ημ\varphi_0$ ή $ημ\varphi_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ από όπου $\varphi_0=\pi/3$ ή $\varphi_0=\frac{2\pi}{3}$ δεκτή αφού $υ<0$, άρα $x=0,8ημ(10t+\frac{2\pi}{3})$ και

$υ=8συν(10t+\frac{2\pi}{3})$

β) $K=U=\frac{E}{2}$ ή $\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}DA^2$ ή $x=\pm\frac{A\sqrt{2}}{2}$ ή $x=\pm 0,4\sqrt{2}$

$x=0,8ημ(10t+\frac{2\pi}{3})$ ή $\pm 0,4\sqrt{2}=0,8ημ(10t+\frac{2\pi}{3})$ ή $ημ(10t+\frac{2\pi}{3})=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow 10t+\frac{2\pi}{3}=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4}$ από όπου βρίσκετε $t=\frac{\pi}{120}s$

2.2.45 A) $E_{ολ}=\frac{1}{2}DA^2=0,5J$, $x=Aημ(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow{t=0} 5\sqrt{3}=10ημ\varphi_0$ ή

$ημ\varphi_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και επειδή $υ>0$ $\varphi_0=\pi/3$

$υ=\omega A συν(\omega t+\frac{\pi}{3}) \xrightarrow{t=0} 0,5\pi=\omega 0,1 συν\frac{\pi}{3}$ ή $0,5\pi=0,1\omega\frac{1}{2}$ ή

$\omega=10\pi\frac{rad}{s}$ και $T=\frac{2\pi}{\omega}$ ή $T=0,2s$

B) $D=m\omega^2$ ή $m=\frac{D}{\omega^2}=\frac{100}{(10\pi)^2}$ ή $m\simeq 0,1kg$

Γ) $x=0,1ημ(10\pi t+\frac{\pi}{3})$ και $υ=\pi συν(10\pi t+\pi/3)$

Δ) ...πρέπει να έχει την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα (...αλλά $υ<0$)

δηλ. $υ=-0,5\pi \Rightarrow -0,5\pi=\pi συν(10\pi t+\frac{\pi}{3})$ ... $t=\frac{1}{30}s$

2.2.46 α) $E_{ολ}=\frac{1}{2}DA^2$ ή $A=0,4m$, $D=m\omega^2$ ή $\omega=5 rad/s$

$U=\frac{1}{2}Dx^2$ ή $U=1,25x^2$ και $K=0,2-1,25x^2$

γ) Την $t=0$ $K=E=K_{max}$ άρα $x=0$

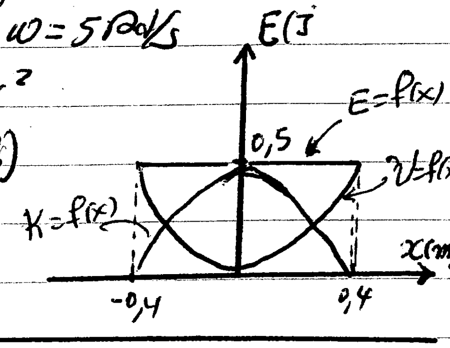
Αν και $υ>0$, τότε $\varphi_0=0$, άρα

$x=0,4ημ(5t)$ και $υ=2συν(5t)$

Αν $υ<0$, τότε $\varphi_0=\pi$, άρα

$x=0,4ημ(5t+\pi)$ και $υ=2συν(5t+\pi)$

β)



2.2.47 (βλέπε 2.1.Γ, 2.1.Δ, 2.1.Ε)

2.2.48 (βλέπε 2.1.Γ, 2.1.Δ, 2.1.Ε)

2.2.49 α) $K=E_{ολ}-\frac{1}{2}Dx^2$, $K=4-100x^2$ $\Rightarrow$ $E_{ολ}=4J$, $\frac{1}{2}D=100$ ή $D=200N/m$ $\Rightarrow$ $E_{ολ}=\frac{1}{2}DA^2$ ή $A=0,2m$

$D=m\omega^2$ ή $m=\frac{D}{\omega^2}$ ή $m=0,5kg$, $F_{max}=DA=40N$

β) $K=U=\frac{E}{2}$ ή $\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}\frac{1}{2}DA^2$ ή $x=\pm A\sqrt{2}/2$, $\Delta x_{min}=|A\sqrt{2}/2-(-A\sqrt{2}/2)|=A\sqrt{2}$

άρα $\Delta x_{min}=0,2\sqrt{2}m$

γ) $U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}200(0,12)^2$ ή $U=1,44J$, $K=E-U=2,56J$, $K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow v=\pm3,2m/s$

$dK/dt=\ldots=\Sigma F\cdot v=-Dxv=-200\cdot(0,12)(\pm3,2)$ ή $dK/dt=\pm76,8J/s$

δ) Επειδή την $t=0$ έχουμε $K=0$ και $F<0$ θα έχουμε $x=+A$ άρα ... $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$

$x=0,2ημ(20t+\frac{\pi}{2})$ ή $x=0,2συν(20t)$, άρα $U=\frac{1}{2}Dx^2$ ή

$U=4ημ^2(20t+\pi/2)$ ή $U=4συν^2(20t)$

2.2.50 α) $D=m\omega^2=100N/m$, $E_{ολ}=\frac{1}{2}DA^2=12,5J$, $v=5συν(10t)$, άρα

$K=\frac{1}{2}mv^2$ ή $K=12,5συν^2(10t)$

β) $dK/dt=\ldots=-Dxv=-100\cdot0,5ημ(10t)\cdot5συν(10t)=-125\cdot2ημ(10t)συν(10t)$

ή $dK/dt=-125\cdotημ(20t)$

γ) $K_{max}=E=12,5J$ την $t=0$ και $t=\frac{T}{2}$ στη θέση $x=0$

$(dK/dt)_{max}=125J/s$ τις χρονικές στιγμές $T/8$, $3T/8$, $5T/8$, $7T/8$ στις θέσεις $x=\pm A\sqrt{2}/2$

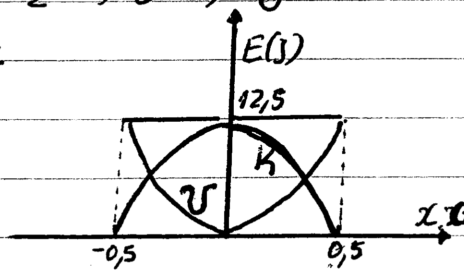
ή $x=\pm0,25\sqrt{2}$ (βλ. 2.1.E)

δ) $U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}D(\pm A\sqrt{2}/2)^2$ ή $U=\frac{1}{2}\frac{1}{2}DA^2$ ή $U=\frac{E}{2}$ ή $U=6,25J$

$K=E-U=\ldots=6,25J$ άρα $K=U=E/2$

ε) $U=\frac{1}{2}Dx^2$ ή $U=50x^2$ (S.I)

$K=E-U$ ή $K=12,5-50x^2$ (S.I)



2.2.51 α) $K_{max}=\frac{1}{2}mv_0^2$ ή $v_0=\sqrt{\frac{2K_{max}}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot4}{2}}$ ή $v_0=2m/s$

$v_0=\omega A$ ή $A=0,2m$, $D=m\omega^2=200N/m$

$x=0,2ημ(10t)$ και $v=2συν(10t)$ (S.I), $F=-Dx$ ή $F=-40ημ(10t)$

β) Όταν $x=0,1m$, $U=\frac{1}{2}Dx^2=1J$ και $K=E-U$ ή $K=3J$

$K=\frac{1}{2}mv^2$ ή $v=\pm\sqrt{3}m/s$, $dK/dt=\Sigma F\cdot v=-Dxv=-200\cdot0,1(\pm\sqrt{3})$ ή $\frac{dK}{dt}=\mp20\sqrt{3}J/s$

γ) $U_{max}=E=4J$, $\frac{dU}{dt}=-\frac{dK}{dt}=Dxv=200\cdot0,2ημ(10t)\cdot2συν(10t)$ ή

$dU/dt=40\cdot2ημ(10t)συν(10t)$ ή $dU/dt=40\cdotημ(20t)$ άρα

$(dU/dt)_{max}=40J/s$

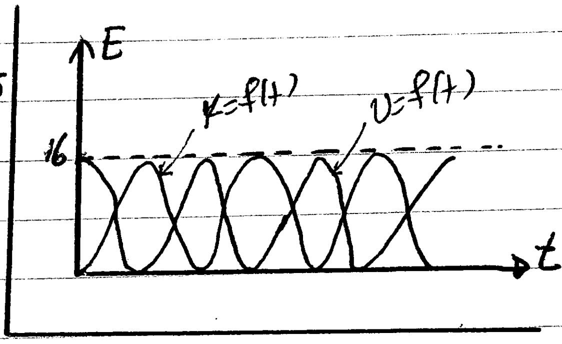
δ) $v=\frac{v_0}{2}$ ή $v=\pm1m/s$ άρα $K=\frac{1}{2}mv^2=1J$ και $U=E-K=3J$

$U=\frac{1}{2}Dx^2$ ή $x=\pm0,1\sqrt{3}m$

$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = \Sigma F v \Rightarrow \frac{dU}{dt} = Dxv$

Αν $x=+0,1\sqrt{3}$ m, $v=-1$ m/s άρα $dU/dt=-20\sqrt{3}$ J/s
Αν $x=-0,1\sqrt{3}$ m, $v=+1$ m/s άρα $dU/dt=-20\sqrt{3}$ J/s $\Big\} \Rightarrow \frac{dU}{dt}=-20\sqrt{3}$ J/s

2.2.52 α) $\omega = 2\pi/T$ ή $\omega=20$ rad/s, $A=0,2$ m και επειδή την $t=0$
$x=+0,2m=+A$ ... $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$, $D=m\omega^2$ ή $D=800$ N/m
$x=0,2\eta\mu(20t+\frac{\pi}{2})$ και $v=4\sigma\upsilon\nu(20t+\frac{\pi}{2})$ ή $x=0,2\sigma\upsilon\nu(20t)$ και
$v=-4\eta\mu(20t)$
$K=\frac{1}{2}mv^2$ ή $K=16\sigma\upsilon\nu^2(20t+\frac{\pi}{2})$ ή $K=16\eta\mu^2(20t)$
$U=\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow U=16\eta\mu^2(20t+\frac{\pi}{2})$ ή $U=16\sigma\upsilon\nu^2(20t)$



β) Για $x=+0,1m$, $U=\frac{1}{2}Dx^2=4J$ και $K=E-U=12J$
$K=\frac{1}{2}mv^2$ ή $v=\sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow v=\pm 2\sqrt{3}$ m/s
$dK/dt=\Sigma F v=-Dxv$ ή $dK/dt=-800(0,1)(-2\sqrt{3})$
ή $dK/dt=160\sqrt{3}$ J/s
γ) $K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}2\sqrt{3}^2$ ή $K=3J$, άρα
$U=E-K=12J$, $U=\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x=\pm 0,1\sqrt{3}$ m
$dU/dt=\dots=Dxv=800(\pm 0,1\sqrt{3})(\pm\sqrt{3})$ άρα $dU/dt=\pm 240$ J/s

2.2.53 α) $K=25\eta\mu^2(10t)$ ή $\frac{1}{2}mv^2=25\eta\mu^2(10t)$ ή $v=\pm 5\eta\mu(10t)$
επειδή την $t=0$ $v<0$ δεκτή ή $v=-5\eta\mu(10t)=5\eta\mu(10t+\pi)$ ή
$v=5\sigma\upsilon\nu(10t+\frac{\pi}{2})$, $D=m\omega^2$ ή $D=2\cdot 10^2$ ή $D=200$ N/m
$v_0=\omega A$ ή $A=v_0/\omega$ ή $A=0,5$ m, άρα
$x=0,5\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2})$ και $a=-50\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2})$
β) $U=K=\frac{E}{2}$ ή $x=\pm A\sqrt{2}/2$ ή $x=\pm 0,25\sqrt{2}$ m, $K=\frac{E}{2}$ ή $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}mv_0^2$
$\Rightarrow v=\pm 2,5\sqrt{2}$ m/s
$dP/dt=\Sigma F=-Dx=-200(\pm 0,25\sqrt{2})$ ή $dP/dt=\pm 50\sqrt{2}$ kg m/s²
$dv/dt=a=-\omega^2 x=-100(\pm 0,25\sqrt{2})$ ή $dv/dt=\pm 25\sqrt{2}$ m/s²
$dK/dt=\Sigma F v=-Dxv=-200(\pm 0,25\sqrt{2})(\pm 2,5\sqrt{2})$ ή $dK/dt=\pm 250$ J/s

2.2.54 $U_{max}=8J$, $T=0,4s$ ή $\omega=5\pi$ rad/s, $D=m\omega^2 \simeq 100$ N/m
$U=\frac{1}{2}Dx^2=8\eta\mu^2(5\pi t)$ ή $x=\pm 0,4\eta\mu(5\pi t)$

Αν $x=0,4ημ(5πt)$ την $t=0$ έχουμε $υ>0$

Αν $x=-0,4ημ(5πt)=0,4ημ(5πt+π)$ την $t=0$ έχουμε $υ<0$

άρα δεκτή η $x=0,4ημ(5πt+π)$ και

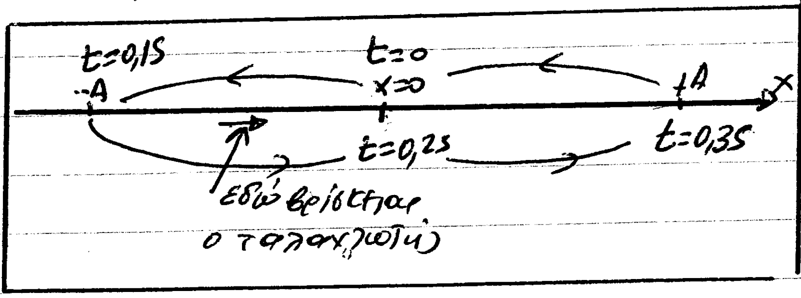
$υ=2π συν(5πt+π)$ ή $υ=6,28 συν(5πt+π)$ (S.I.)

β) β.1 λάθος

β.2 σωστό

β.3 λάθος

β.4 λάθος



γ.1) Την $t=0,25\,s$ $x=0,4ημ(5πt+π)=\dots=0,2\sqrt{2}\,m$

$U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}100(0,2\sqrt{2})^2=4J$ και $K=E-U$ ή $K=4J$

γ.2) $\frac{dU}{dt}=-\frac{dK}{dt}$ ... οι ρυθμοί μεταβολής είναι αντίθετοι σε κάθε χρονική στιγμή.

2.2.55 $K_{max}=8J$, $E_{ολ}=8J$, $A=0,4m$

$K_{max}=\frac{1}{2}mυ_0^2 \Rightarrow υ_0=2\,m/s$, $υ_0=ωA$ ή $ω=\frac{υ_0}{A}$ ή $ω=5\,rad/s$

$D=mω^2=100N/m$

α) $F=-Dx$ ή $F=-100x$ (SI)

$U=\frac{1}{2}Dx^2$ ή $U=50x^2$

β) $K=U=\frac{E}{2} \Rightarrow \dots x=\pm A\sqrt{2}/2$

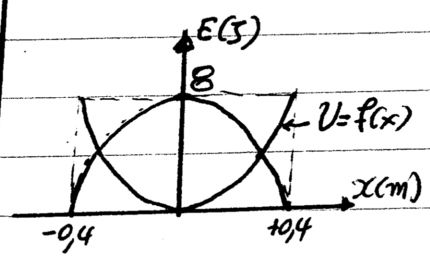
$x=Aημ(ωt+φ_0) \xrightarrow{t=0} +A\sqrt{2}/2=Aημφ_0 \xrightarrow{υ>0} φ_0=\frac{π}{4}$

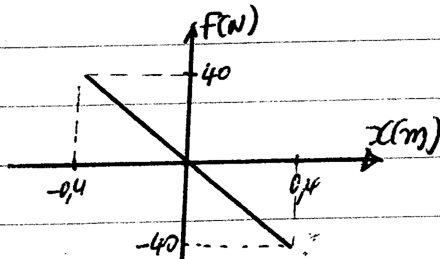
άρα $x=0,4ημ(5t+π/4)$

$υ=2συν(5t+\frac{π}{4})$ ... και

$U=\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow U=8ημ^2(5t+π/4)$ (S.I)

$K=\frac{1}{2}mυ^2 \Rightarrow K=8συν^2(5t+\frac{π}{4})$ (S.I)





2.2.56 α) Όταν τα δύο κινητά συναντιώνται $x_1=x_2$ ή $0,2ημ(25πt)=0,2ημ(25πt+π/3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 25πt+π/3=2κπ+25πt & \dots \text{άτοπο} \\ 25πt+\frac{π}{3}=(2κ+1)π-25πt \end{cases}$$

$\Rightarrow 50πt=2κπ+π-π/3 \Rightarrow 50πt=2κπ+\frac{2π}{3}$ ή

ή $t=\frac{6κ+2}{150}s$ ... $t=\frac{2}{150}s, \frac{8}{150}s, \dots$ Η συνάντηση γίνεται στη

θέση $x=0,2ημ(25π\frac{6κ+2}{150})$ ή $x=0,2ημ(\frac{6κ+2}{6}π)=0,2ημ(κπ+\frac{π}{3})$

$\Rightarrow x=\pm 0,1\sqrt{3}\,m$

β) $|Δx|=|x_1-x_2|=0,2\left|ημ(25πt+\frac{π}{3})-ημ(25πt)\right|=0,2\left|2ημ\frac{π}{6}συν(25πt+\frac{π}{6})\right|$

$\Rightarrow |\Delta x| = 0{,}2 \left|συν\left(25\pi t+\frac{\pi}{6}\right)\right|$ άρα $\Delta x_{max} = 0{,}2m$ όταν
$\left|συν\left(25\pi t+\frac{\pi}{6}\right)\right|_{max} = 1$ ή $συν\left(25\pi t+\frac{\pi}{6}\right) = \pm 1$ ή $25\pi t+\frac{\pi}{6} = k\pi$ ή
$25\pi t = k\pi - \pi/6 \Rightarrow t = \frac{6k-1}{150}$, $t = \frac{5}{150}s, \frac{11}{150}s, \ldots$

γ) Για $x = \pm 0{,}1\sqrt{3}m \Rightarrow U = \frac{1}{2}Dx^2$
$U/E = \frac{1/2 Dx^2}{1/2 DA^2} \Rightarrow U/E = \left(\frac{x}{A}\right)^2 = \ldots = 0{,}75$, ποσοστό 75%

δ) $x_1 = 0{,}2ημ(25\pi t) \Rightarrow \pm 0{,}2 = 0{,}2ημ(25\pi t)$ ή $25\pi t = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (1)
$x_2 = 0{,}2ημ(25\pi t + \pi/3) \xrightarrow{(1)} x_2 = 0{,}2ημ(k\pi + \frac{\pi}{2} + \pi/3)$ ή $x_2 = \mp 0{,}1m$
$K/E = \frac{E-U}{E} = 1 - \left(\frac{x_2}{A}\right)^2 = \ldots = 0{,}75$, ποσοστό 75%

3. Μαθηματική μελέτη της ελεύθερης και αμείωτης α.α.τ.

3.1.2 Λ, Σ, Λ, Σ, Λ   3.1.3 Λ, Λ, Σ, Σ   3.1.4 Λ, Λ, Σ, Λ
3.1.5 Λ, Λ, Λ, Σ   3.1.6 Λ, Λ, Σ, Σ   3.1.7 Λ, Σ, Λ, Σ

3.1.8 Α α) $A = 0{,}5m$ β) $D = m\omega^2 \simeq 2\cdot 10^5 N/m$, $E = \frac{1}{2}DA^2$ ή $E = 25\cdot 10^3 J$
γ) $\omega = 2\pi f = 100\pi\ rad/s$ Β α) $x = 0{,}5ημ(100\pi t + \pi/2)$, $v = 50\pi συν(100\pi t + \frac{\pi}{2})$
β) $K = U = \frac{E}{2} \Rightarrow \ldots x = \pm A\sqrt{2}/2$ ή $x = \pm 0{,}25\sqrt{2}m$
$x = 0{,}5ημ(100\pi t + \pi/2) \Rightarrow \pm 0{,}25\sqrt{2} = 0{,}5ημ(100\pi t + \pi/2) \ldots t = 1/400 s$
Γ) Σ, Λ, Λ, Λ. Σωστή η πρόταση (α).

3.1.9 Α α) $D = m\omega^2 = 200 N/m$, $1/2 Dx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = 0{,}4m$
β) $E = 1/2 DA^2$ ή $E = 16J$. Β) $x = 0{,}4ημ(10t + \frac{\pi}{6})$, $F = -200x$ (SI)
$\Rightarrow F = -80ημ(10t + \pi/6)$ (SI)
Γ) α) Από το χαρακτηριστικό β) Από το αίτιο που διεγείρει τον ταλαντωτή.

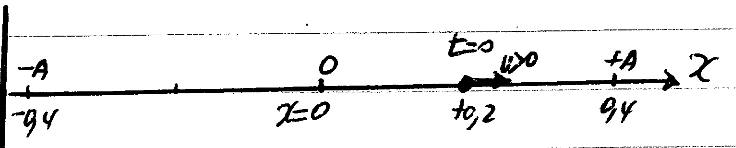
3.1.10. Α α) $v = v_0 = \omega A$ ή $A = v/\omega$ ή $A = 0{,}4m$ β) $D = m\omega^2 = 100 N/m$
$E = 1/2 DA^2$ ή $E = 8J$
Β) α) $x = 0{,}4ημ(10t)$, $v = 4συν(10t)$, $\alpha = -40ημ(10t)$
β) Στη θέση $x = +0{,}4m$ τη στιγμή $t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow t = \frac{\pi}{20}s$

3.1.11 $E_{ταλ} = E_{προσ} = 16J$, $E_{ταλ} = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = 0{,}4m$, $D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10 rad/s$
α) $v_0 = \omega A = 4 m/s$, $\alpha_0 = \omega^2 A = 40 m/s^2$ β) $\Sigma F = -Dx = -40N$
γ) $x = 0{,}4ημ(10t + \pi/2) \rightsquigarrow U = \frac{1}{2}Dx^2 \rightsquigarrow U = 16ημ^2(10t + \pi/2)$ (SI)
$v = 4συν(10t + \pi/2) \rightsquigarrow K = 1/2 mv^2 \rightsquigarrow K = 16συν^2(10t + \pi/2)$ (SI)
$U = K = \frac{E}{2} \rightsquigarrow x = \pm 0{,}2\sqrt{2} \rightsquigarrow t = \pi/40 s$

δ) $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot υ = -Dxυ = -200\cdot 0{,}4\,ημ(10t+π/2)\cdot 4συν(10t+\frac{π}{2})$ ή
$dK/dt = -320\,συν(10t)(-ημ(10t)) \Rightarrow dK/dt = 160\cdot ημ(20t)$ SI
άρα $(dK/dt)_{max} = 160\,J/s$ όταν $ημ(20t)=\pm 1$ ή $20t = κπ + π/2$
και για πρώτη φορά τη $t = π/40\,s$.

3.1.12 α) Η προσφερόμενη στον ταλαντωτή ενέργεια είναι όσο είναι το έργο της δύναμης F, $E_{προσ} = W_F = F\cdot\Delta x = 2{,}0J$, τόση είναι προφανώς και η ενέργεια που θα έχει ο ταλαντωτής. $E_{ταλ} = \frac{1}{2}DA^2$ με $D = mω^2 = 25\,N/m$, άρα $A=\sqrt{2E_{ταλ}/D} \Rightarrow A = 0{,}4m$ (... προσοχή!)

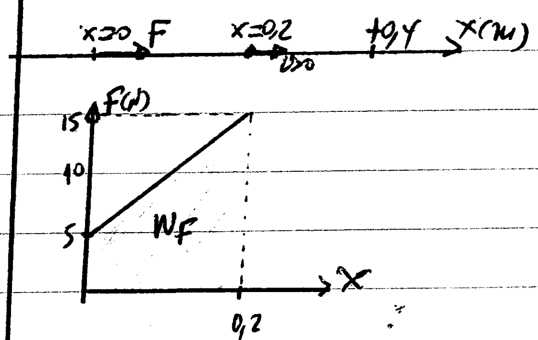
β) $W_{ελ} = \frac{1}{2}Dx_{αρχ}^2 - \frac{1}{2}Dx_{τελ}^2 \Rightarrow$
$W_{ελ} = -\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 0{,}2^2$ ή $W_{ελ} = -0{,}5J$



γ) ... $φ_0 = π/6$
$x = 0{,}4ημ(5t+\frac{π}{6})$ (SI)
$υ = 2συν(5t+π/6)$ (SI)

δ) $(dυ/dt)_{max} = a_{max}$ όταν $x=+0{,}4m$ ή $0{,}4ημ(5t+\frac{π}{6}) = 0{,}4$ ή $5t+\frac{π}{6}=\frac{π}{2}$ ή $t=\frac{π}{15}s$

3.1.13) α) $E_{προσ}=W_F$. Επειδή η δύναμη F είναι μεταβλητή το έργο της ισούται με το εμβαδόν της $F=f(x)$
$E_{προσ} = W_F = \frac{5+15}{2}0{,}2 = 2J$, άρα η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E_T=2J$



β) $E_T = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = 0{,}4m$

γ) $\frac{dp}{dt} = \Sigma F$ άρα $(dp/dt)_{max}$ όταν ΣF_{max} δηλ. στη θέση $x=+A=+0{,}4m$
$W_{ελατ} = \frac{1}{2}Dx_{αρχ}^2 - \frac{1}{2}Dx_{τελ}^2 \Rightarrow$
$W_{ελατ} = \frac{1}{2}\cdot 25\,(0{,}2^2-0{,}4^2) \Rightarrow W_{ελ} = -1{,}5J$

3.1.14) α) $D=mω^2 = 2\cdot 5^2 = 50\,N/m$ = σταθερή, ίδια σε κάθε περίπτωση.

* γ) αρχικά $E=\frac{1}{2}DA^2$, τελικά $E+ΔE = \frac{1}{2}D(A+ΔA)^2$. Από τις σχέσεις αυτές $ΔE = \frac{1}{2}D(A+ΔA)^2 - \frac{1}{2}DA^2$ ή $ΔE = \frac{1}{2}D(ΔA)^2 + DA\cdot ΔA$ ή
$1{,}25 = \frac{1}{2}50\cdot 0{,}1^2 + 50\cdot A\cdot 0{,}1$ από όπου $A=0{,}2m$ και $A'=A+ΔA$ ή $A'=0{,}3m$

* β) $T = \frac{2π}{ω} = 2π/5\,s$ = σταθερή, ίδια σε κάθε περίπτωση.

δ) $υ_{0,1} = ωA = 5\cdot 0{,}2 = 1\,m/s$, $υ_{0,2} = ωA' = 1{,}5\,m/s$, $Δυ_0 = +0{,}5\,m/s$

4. Σώματα που εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση.

4.2.16 (Λ,Λ,Λ,Σ) 4.2.17 (Λ,Σ,Λ,Σ) 4.2.18 (Λ,Λ,Λ,Σ)

4.2.19 (Λ,Σ,Σ,Λ) 4.2.20 (Λ,Λ,Σ,Σ,Σ) 4.2.21 (Λ,Λ,Σ,Λ)

4.2.22 (Σ,Λ,Λ,Λ) 4.2.23 (Σ,Σ,Λ,Λ) 4.2.24 (Λ,Σ,Σ,Σ)

4.2.25 (Λ,Σ,Λ,Σ) 4.2.26 (Λ,Λ,Σ,Λ,Λ) 4.2.27 (Σ,Λ,Λ,Λ)

4.2.28 (Λ,Σ,Λ,Σ) 4.2.29.Β (Λ,Λ,Σ,Σ,Λ)

4.2.30 Α (βλ. θεωρία)

Β. πλάτος $A=\frac{mg}{k}$

$U_{max}=\frac{1}{2}DA^2=\frac{m^2g^2}{2k}$

Γ.1 $T=2\pi\sqrt{m/D}=2\pi\sqrt{m/k}$

Επειδή η μάζα τετραπλασιάζεται, η περίοδος διπλασιάζεται.

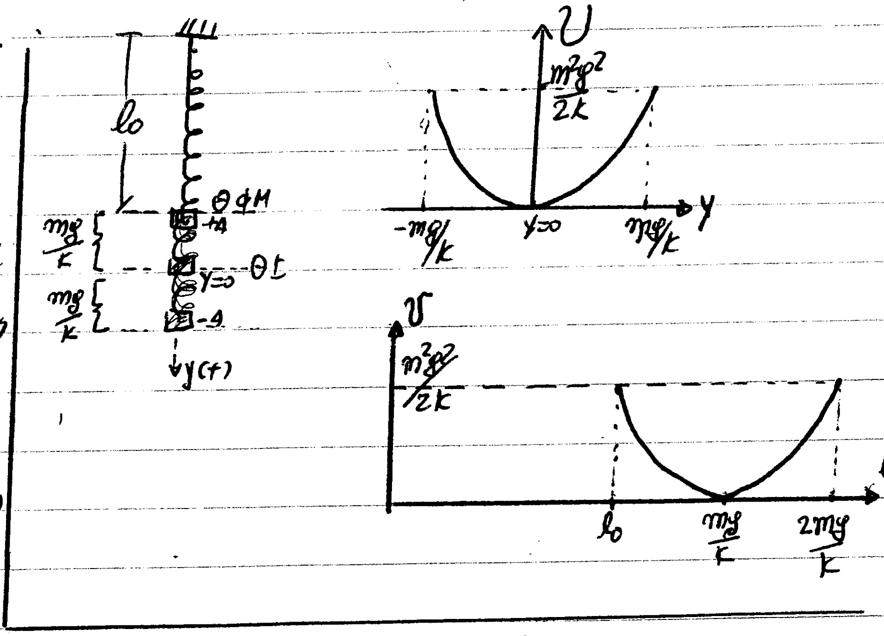
Σωστή η πρόταση (δ)

Γ.2 $A=\frac{mg}{k}$.

Επειδή $m'=4m$ προκύπτει

$A'=4A$

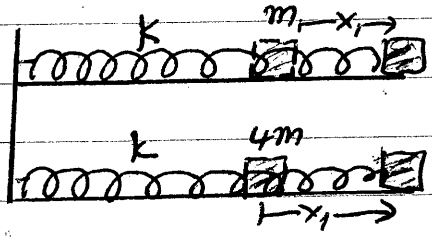
Σωστή η πρόταση (α)



Γ.3) $\upsilon_0=\omega A=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{mg}{k} \Rightarrow \upsilon_0=\sqrt{\frac{mg^2}{k}}$. Επειδή $m'=4m$ προκύπτει, $\upsilon'=2\upsilon_0$

Σωστή η πρόταση (δ.)

4.2.31 $D=k$



A.1) $A_1=A_2=x_1$. $\frac{1}{2}Dx_1^2=\frac{1}{2}DA_1^2 \Rightarrow A_1=x_1$

A.2) $\left.\begin{aligned}T_1&=2\pi\sqrt{m/k}\\ T_2&=2\pi\sqrt{4m/k}\end{aligned}\right\} T_2=2T_1$

A.3) $\left.\begin{aligned}N_1&=f_1t=\frac{t}{T_1}\\ N_2&=f_2t=\frac{t}{T_2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2}=\frac{T_2}{T_1}=2 \Rightarrow N_1=2N_2$

A.4) $\left.\begin{aligned}\upsilon_{01}&=\omega_1A=\sqrt{\frac{k}{m}}A\\ \upsilon_{02}&=\omega_2A=\sqrt{\frac{k}{4m}}A\end{aligned}\right\} \Rightarrow \upsilon_{02}=\frac{\upsilon_{01}}{2}$ ή $\upsilon_{01}=2\upsilon_{02}$

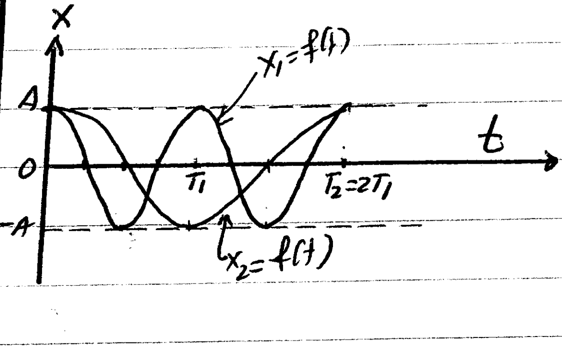
A.5 $\left.\begin{aligned}\alpha_{01}&=\omega_1^2A=\frac{k}{m}A\\ \alpha_{02}&=\frac{k}{4m}A\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_{02}=\frac{\alpha_{01}}{4}$ ή $\alpha_{01}=4\alpha_{02}$

A.6 $\left.\begin{aligned}F_{01}&=DA=kA\\ F_{02}&=DA=kA\end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{01}=F_{02}$

A.7. $\left.\begin{aligned} E_1&=\frac{1}{2}DA_1^2=\frac{1}{2}kA^2 \\ E_2&=\frac{1}{2}DA_2^2=\frac{1}{2}kA^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow E_1=E_2$

B) $x_1=A\eta\mu(\omega_1 t+\frac{\pi}{2})=A\eta\mu(\frac{2\pi}{T_1}t+\frac{\pi}{2})$

$x_2=A\eta\mu(\frac{2\pi}{T_2}t+\frac{\pi}{2})$ με $T_2=2T_1$



Γ) Γ.1 Σωστό $E=\frac{1}{2}DA^2=σταθ=\frac{1}{2}kA^2$

Γ.2 Σωστό $K=E-U=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}kx^2$

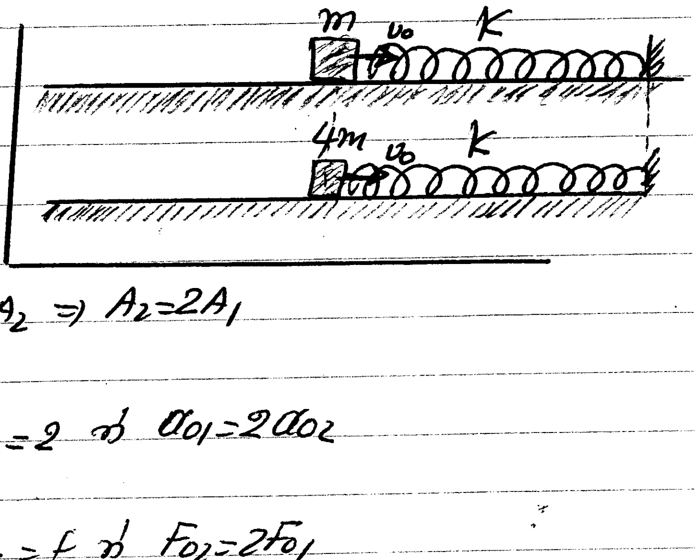
Γ.3 Σωστό $U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}kx^2$

Δ) Δ.1 Σωστό $E=σταθ=\frac{1}{2}kA^2\ \forall t$ $\quad E_1=E_2=\frac{1}{2}kA^2$

Δ.2 Λάθος $K=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}kx^2$, Από την B φαίνεται ότι την ίδια χρονική στιγμή t, $x_1\neq x_2$ άρα $K_1\neq K_2$

Δ.3 Λάθος $U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}kx^2$ ... ίδια εξήγηση $U_1\neq U_2$

4.2.32.



A.1) $D=k=m\omega^2$

$\omega_1=\sqrt{k/m}$ και $\omega_2=\sqrt{k/4m}=\frac{\omega_1}{2}$ ή

$\omega_2=\frac{\omega_1}{2}$ ή $\omega_1=2\omega_2 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_1}=2\frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow T_2=2T_1$

A.2) $\upsilon_0=\omega_1A_1=\omega_2A_2 \Rightarrow 2\omega_2A_1=\omega_2A_2 \Rightarrow A_2=2A_1$

A.3) $\upsilon_{01}=\upsilon_{02}=\upsilon_0$

A.4) $\left.\begin{aligned} a_{01}&=\omega_1^2A_1 \\ a_{02}&=\omega_2^2A_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a_{01}}{a_{02}}=\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2\cdot\frac{A_1}{A_2}=2$ ή $a_{01}=2a_{02}$

A.5) $\left.\begin{aligned} F_{01}&=kA_1 \\ F_{02}&=kA_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{F_{01}}{F_{02}}=\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_1}{2A_1}=\frac{1}{2}$ ή $F_{02}=2F_{01}$

A.6) $\left.\begin{aligned} E_1&=\frac{1}{2}kA_1^2 \\ E_2&=\frac{1}{2}kA_2^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow E_2=4E_1$

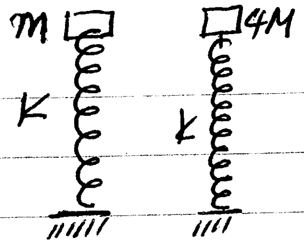
B) Αυτό που έχει ...τη μικρότερη περίοδο δηλ. το (1).

4.2.33. A. (βλ. θεωρία)

B.1) $T_1=2\pi\sqrt{M/k}$, $T_2=2\pi\sqrt{4M/k}=2T_1$, άρα $T_2=2T_1$

B.2) $A_1=Mg/k$, $A_2=\frac{4Mg}{k}$, άρα $A_2=4A_1$

B.3) $\upsilon_{01}=\omega_1A_1=\frac{2\pi}{T_1}A_1$ και $\upsilon_{02}=\frac{2\pi}{T_2}A_2$ άρα $\frac{\upsilon_{01}}{\upsilon_{02}}=\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{A_1}{A_2}=\frac{2T_1}{T_1}\cdot\frac{A_1}{4A_1}$



άρα $v_{01}/v_{02}=\frac{1}{2}$ ή $v_{02}=2v_{01}$

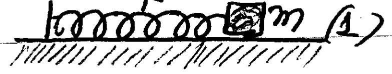
B.4) $\alpha_{01}=\omega_1^2A_1=\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2A_1$ και $\alpha_{02}=\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2A_2$

$\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{02}}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\frac{A_1}{A_2}=\left(\frac{2T_1}{T_1}\right)^2\frac{A_1}{4A_1}$ ή $\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{02}}=1$ ή $\alpha_{01}=\alpha_{02}$

B.5. $F_{01}=D_1A_1=kA_1$, $F_{02}=kA_2=4kA_1=4F_{01}$ άρα $F_{02}=4F_{01}$

B.6 $E_1=\frac{1}{2}D_1A_1^2=\frac{1}{2}kA_1^2$, $E_2=\frac{1}{2}kA_2^2=\frac{1}{2}k(4A_1)^2=16E_1$ ή $E_2=16E_1$

4.2.34 A) Αυτός που έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα $\omega_1=\sqrt{k/m}$, $\omega_2=\sqrt{k/(m/2)}$
ή $\omega_2=\sqrt{2k/m}>\omega_1 \Rightarrow \omega_2>\omega_1$ ή $f_2>f_1$. Άρα ο ταλαντωτής (2).

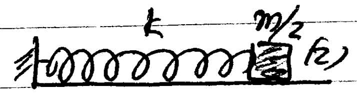


B.1) $E=\frac{1}{2}DA^2=\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A=\sqrt{2E/k}$ άρα $A_1=A_2=\sqrt{2E/k}$.

B.2) $F_{01}=DA_1=kA=\dots=F_{02}$; άρα $F_{01}=F_{02}$

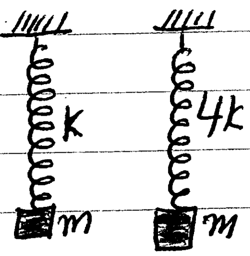
B.3) $v_0=\omega A=\sqrt{k/m}\sqrt{2E/k}\Rightarrow v_0=\sqrt{2E/m}$ ... ή $K_{max}=E=\frac{1}{2}mv_0^2\Rightarrow v_0=\sqrt{2E/m}$

$v_{01}=\sqrt{2E/m}$, $v_{02}=\sqrt{2E/(m/2)}\Rightarrow v_{02}=\sqrt{\frac{2E}{m}}\sqrt{2}\Rightarrow v_{02}=v_{01}\sqrt{2}$



B.4) $\alpha_{01}=\frac{F_{01}}{m}$, $\alpha_{02}=\frac{F_{02}}{m/2}=2\frac{F_{02}}{m}=2\frac{F_{01}}{m}$ ή $\alpha_{02}=2\alpha_{01}$

4.235.



A.1) $A_1=A_2=y_1=A$

A.2) $\left.\begin{aligned}F_{01}&=D_1A_1=kA\\F_{02}&=D_2A_2=4kA\end{aligned}\right\}\Rightarrow F_{02}=4F_{01}$

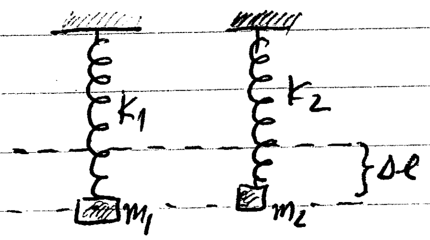
A.3) $\left.\begin{aligned}v_{01}&=\omega_1A_1=\frac{2\pi}{T_1}A_1\\v_{02}&=\omega_2A_2=\frac{2\pi}{T_2}A_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{v_{01}}{v_{02}}=\frac{T_2}{T_1}\frac{A}{A}$ ή $\frac{v_{01}}{v_{02}}=\frac{2\pi\sqrt{m/4k}}{2\pi\sqrt{m/k}}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow v_{02}=2v_{01}$

A.4) $\frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}}=\frac{\omega_2^2A_2}{\omega_1^2A_1}\Rightarrow\frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}}=4$ ή $\alpha_{02}=4\alpha_{01}$

B) Ο ταλαντωτής με την μικρότερη περίοδο ... ο (2)

4.2.36. Για τη θέση ισορροπίας



$\left.\begin{aligned}m_1g&=k_1\Delta l\\m_2g&=k_2\Delta l\end{aligned}\right\}\frac{m_1}{m_2}=\frac{k_1}{k_2}\xrightarrow{m_1>m_2}k_1>k_2$

$A_1=A_2=A=y_1$ ίδιο πλάτος

$\left.\begin{aligned}E_1&=\frac{1}{2}D_1A_1^2=\frac{1}{2}k_1A^2\\E_2&=\frac{1}{2}D_2A_2^2=\frac{1}{2}k_2A^2\end{aligned}\right\}\xrightarrow{k_1>k_2}E_1>E_2$

4.2.37 A) $D_1 = k_1 = m\omega_1^2$, $D_2 = k_2 = m\omega_2^2$ $\Big\} \xrightarrow{k_2 = 4k_1} m\omega_2^2 = 4m\omega_1^2$ ή $\omega_2 = 2\omega_1$ ή $f_2 = 2f_1$

B) $E_1 = \frac{1}{2}D_1 A_1^2 = \frac{1}{2}k_1 A_1^2$, $E_2 = \frac{1}{2}D_2 A_2^2 = \frac{1}{2}k_2 A_2^2$ $\Big\} \xrightarrow{A_1 = A_2 = x_1} \frac{E_1}{E_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{k_1}{4k_1} = \frac{1}{4}$ ή $E_2 = 4E_1$

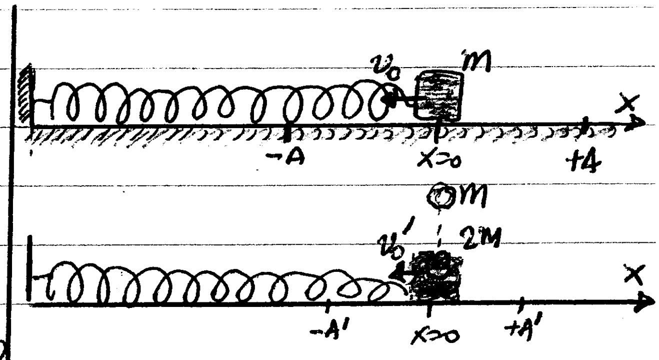
4.2.38 A. (βλ. θεωρία) B. $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

Γ. $A = x_1$, $\omega = \sqrt{k/m_1}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ... $x = A\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$ ή

ή $x = A_1\eta\mu(\sqrt{k/m_1}\,t + \frac{\pi}{2})$

Δ. Το Σ_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση και ο χρόνος καθόδου είναι $t_2 = \sqrt{2H/g}$. Και αλλά $t_2 = \frac{T}{4}$ ... που είναι ανεξάρτητο του πλάτους της ταλάντωσης, άρα $H' = H$.

4.2.39



α- Σωστή. Για κάθε σώμα ισχύει σταθερά επαναφοράς ελατήριο $D = K$.

β- λάθος. $T_1 = 2\pi\sqrt{m/k}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{2m/k}$ $\Rightarrow$ $T_2 = T_1\sqrt{2}$, άρα $T_1 \neq T_2$

γ- λάθος. 1η ταλάντωση $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}KA^2$ (1)

2η ταλάντωση $\frac{1}{2}2mv_0'^2 = \frac{1}{2}KA'^2$ ή

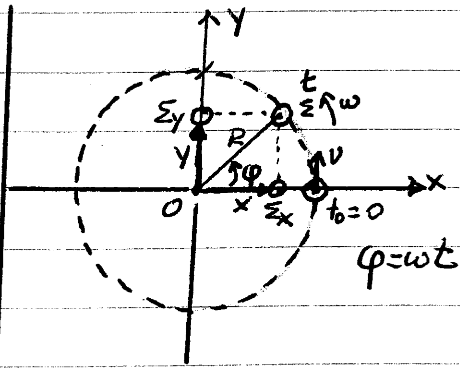
$\vec{P}_{\sigma\alpha\theta} \Rightarrow mv_0 = 2mv_0' \Rightarrow v_0' = \frac{v_0}{2}$

$m\frac{v_0^2}{4} = \frac{1}{2}KA'^2$ (2). Από (1),(2) $A' = \frac{A\sqrt{2}}{2}$, άρα $A' \neq A$

δ- λάθος. 1η ταλάντωση $E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$, 2η ταλάντωση $E_2 = \frac{1}{2}2mv_0'^2$ ή

$E_2 = \frac{1}{2}2m\frac{v_0^2}{4}$ ή $E_2 = \frac{E_1}{2}$, άρα $E_1 \neq E_2$

4.2.40. Καθώς το υλικό σημείο Σ στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, οι προβολές του Σ_x και Σ_y στους άξονες x'x και y'y εκτελούν παλινδρομικές κινήσεις -ταλαντώσεις- με απομακρύνσεις



$x = R\sigma\upsilon\nu\varphi$ ή $x = R\sigma\upsilon\nu(\omega t)$ ή $x = R\eta\mu(\omega t - \pi/2)$ και

$y = R\eta\mu\varphi$ ή $y = R\eta\mu(\omega t)$ δηλαδή απομακρύνσεις που είναι αρμονικές συναρτήσεις του χρόνου, άρα α.α.τ